¡EL $99{,}\widehat{9}\,\%$ DE LOS GEÓMETRAS NO PUEDEN CON ESTE PROBLEMA!

HENRY DÍAZ BORDÓN Y TATIANA MARÍA ELOKHIN ARAÑA

Vayamos directos al grano: este es un círculo de radio uno y, usando solamente regla y compás, quiero que construyas un cuadrado con su misma área. Asegúrate de intentarlo tanto como puedas... ¿Ya? Pues sea lo que sea que hayas hecho está mal, y es que tiene trampa—como fácilmente puede intuirse por el título—pues acabo de lanzar la milenaria e imposible «cuadratura del círculo»; de ella precisamente trata este artículo, pues como veremos, destila gran parte de la historia de las matemáticas en su enunciado.

1. El albor de las matemáticas

¿Alguna vez te has preguntado de dónde vienen los números? No me refiero a la cuestión metafísica de la procedencia de las ideas, de si los teoremas se inventan o se descubren, sino a algo más tangible como la historia de esta disciplina. ¿De dónde surgen las mates como ciencia?

Pues precisamente de intentar cuantificar aspectos de la vida cotidiana y comercial (no hace falta sino ver que «geometría» significa literalmente «medición de la tierra»); es bastante conveniente saber que uno posee exactamente $124{,}25\mathrm{m}^2$ para plantar, o que si ha vendido 12 vasijas de aceite a 5 monedas cada una habrá ingresado un total de 60 monedas. Así, las mates primigenias tenían un propósito enteramente pragmático. Esto se ve plasmado en que las primeras culturas tenían fórmulas o «recetas» que ejecutaban sin necesidad de demostración; por ejemplo, para los babilonios el área de un círculo es $3r^2$, lo que los convierte oficialmente en los primeros ingenieros (aunque no llegasen a la conclusión de que $e = \sqrt{g}$).

No obstante, fue la civilización griega la que impulsó un cambio de paradigma (en gran medida, gracias a Tales de Mileto); el culto al pensamiento que se cultivaba en la región helénica supuso el rechazo a aquellos procedimientos mecánicos fundamentados únicamente sobre la evidencia, y por tanto la búsqueda de pruebas por medio de la razón. Pensemos ahora en todo el conocimiento matemático como una especie de árbol, donde cada hoja es un resultado que depende de otros tantos; si seguimos bajando y bajando eventualmente tendremos que llegar a la raíz. Como de la nada, nada sale, algunas verdades tendremos que asumirlas, y para los protagonistas de hoy estas fueron la *recta* y el *círculo*, por eso la matemática clásica rigurosa se confina únicamente a construcciones con regla y compás, y por eso el problema que nos ocupa resulta ser imposible.

2. La cuadratura del círculo

¿Sabes qué se les daba muy bien a los antiguos griegos? Las proporciones. Otra cosa no, pero si tú les dabas dos figuras distintas y ellos podían transformarlas en cuadrados usando sus queridas regla y compás, ten por seguro que podrían comparar sus áreas sin mayor inconveniente.

Ahora, ¿qué figuras pueden ser reducidas a cuadrados a través de este método? El triángulo desde luego, y como podemos subdividir cualquier polígono en triángulos, cualquier polígono puede convertirse en un cuadrado utilizando regla y compás. ¿Y si el área era curva? Eso sí no está tan claro. Hipócrates dio esperanza cuando logró cuadrar una lúnula, pero algo tan fundamental como el propio círculo—recordemos, una de las dos construcciones básicas—, se les estaba atragantando. De esta forma, la cuadratura del círculo pasó a convertirse en el problema clásico por antonomasia, junto a trisecar un ángulo y duplicar un cubo, pues de ser resuelto supondría poder medir con total precisión el área de la figura más importante.

Fecha: 30 de junio de 2025.

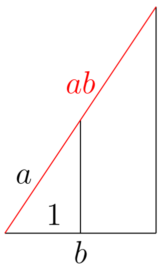
Problema (cuadratura del círculo)**.** ¿Puede transformarse un círculo en un cuadrado de igual área usando solamente regla y compás?

Es preciso mencionar que antes tampoco hemos sido completamente sinceros con las normas, pues la regla griega no es como la se usa hoy en día (con marcas que nos indican longitudes), sino que más bien se reducía a un trozo recto con el que trazar líneas. Veamos entonces qué herramientas tenían los antiguos geómetras en su arsenal a la hora de abordar operaciones:

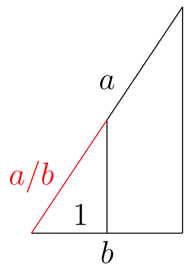
- En primer lugar, si tenían dos segmentos de longitudes a y b, podían juntarlos y producir uno que midiese la suma de ambas:

- De igual forma, si superponemos el menor en el extremo del mayor, hallamos su diferencia:

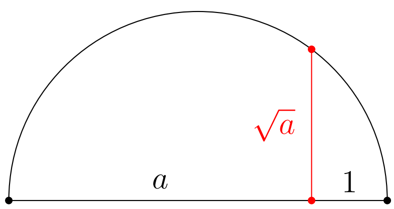
- Empleando semejanzas de triángulos se puede construir el producto de a y b:



- Y análogamente, el cociente a sobre b:

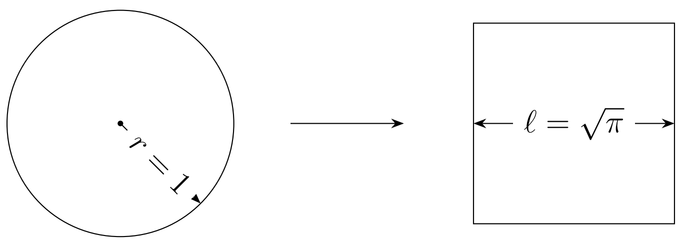


- Finalmente, a través de una circunferencia de diámetro $a+1$ podemos hallar $\sqrt{a}$:



La aritmética griega se reducía pues a estas escasas operaciones, y todos los números que de ellas se podían obtener se dicen *construibles*, porque se pueden en efecto crear con regla y compás.

Volvamos al problema que nos incumbe, y consideremos el caso particular en el que el radio es la unidad (cualquier otro puede es equivalente), ello supondría que para que se pudiese cuadrar tal círculo habría de crearse un cuadrado de lado $\sqrt{\pi}$, pero como no hay ningún inconveniente en tomar raíces, la cuadratura del círculo será cierta si y solo si π es un número construible.



Problema (cuadratura del círculo)**.** ¿Puede expresarse π como una combinación de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas aplicadas a números enteros?

Así, hemos transformado un problema completamente geométrico en uno algebraico, que habría de esperar milenios para ser finalmente resuelto.

3. La solución

Saltar directamente a una demostración no solo sería insatisfactorio, sino irrespetuoso hacia el arduo trabajo de la comunidad matemática durante ese periodo; sería obviar, como ya dijimos, varios milenios de historia.

Y es que no por nada se convirtió en la obsesión de innumerables matemáticos, desde aficionados hasta profesionales, algunos de los cuales continúan enviando construcciones erróneas a universidades de todo el mundo. Es tanta la popularidad de la que goza este problema que se ha convertido en sinónimo de imposibilidad, y ha incursionado en la cultura popular para hacer aparición en noticias, canciones, libros (de hecho, uno con este mismo título fue nombrado Premio Fastenrath de la RAE en 1999) e incluso en *La Divina Comedia* de Dante:

> *Y como el geómetra que afanado*
> *en medir el círculo no halla*
> *en su pensamiento el principio que necesita,*[...]

Los avances más prominentes en esta área comenzaron con el estudio de la circunferencia y la estimación del número π por parte de Arquímedes, pero indudablemente la introducción del plano coordenado de René Descartes resultó fundamental para la resolución final, pues gracias a él podían describirse las figuras geométricas como ecuaciones algebraicas. El punto final lo puso Ferdinand von Lindemann, quien demostró una condición todavía más fuerte.

Un número algebraico es aquel que puede escribirse como solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros; nota que todo número construible es también algebraico, así que si no es algebraico tampoco será construible. Lo que Lindemann demostró es que si α es algebraico, entonces e^{α} no lo es, y de ahí cae la cuadratura del círculo inmediatamente:

Teorema (cuadratura del círculo)**.** *No puede cuadrarse el círculo usando solo regla y compás.*

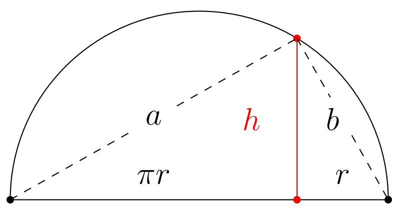
Demostración. Supongamos que sí, que puede cuadrarse y por tanto π es construible y algebraico. La unidad imaginaria también lo es, porque es solución de $x^2 + 1 = 0$, luego evidentemente $i\pi$ también. Entonces, por el teorema de Lindemann, $e^{i\pi} = -1$ no debería de serlo, pero esto es una contradicción porque -1 es claramente algebraico, por tanto nuestra asunción fue incorrecta y π no es algebraico y, por consiguiente, tampoco construible. □

A los números que no son algebraicos se les otorga el nombre de *trascendentes*, en el que queda plasmada la importancia de este problema para la historia de la disciplina. Después de todo, aquel enigma que volvió locos a los matemáticos resultó ser imposible.

4. Cómo sí cuadrar el círculo

Pero recordemos una vez más las reglas del juego, la regla y el compás. Si las relajamos y damos la posibilidad de emplear otros utensilios y procedimientos por supuesto que puede cuadrarse el círculo. Para no terminar con mal sabor de boca, he aquí una de estas construcciones:

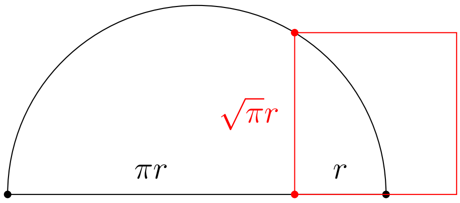
Partimos de un círculo de radio r, luego área πr^2. Vamos a rodarlo como si fuese un rodillo para pintar de tal forma que quede su circunferencia ($2\pi r$) como un segmento, el cual dividiremos a la mitad y añadiremos r para formar el diámetro de una semicircunferencia sobre la cual trazaremos una altura h en el punto entre πr y r y formaremos tres triángulos rectángulos con los tramos:



De aquí, se obtienen las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 & = (\pi r)^2 + h^2 \\ b^2 & = r^2 + h^2 \\ (\pi r + r)^2 & = a^2 + b^2 \end{cases} \implies (\pi r + r)^2 = (\pi r)^2 + r^2 + 2h^2 \implies 2h^2 = 2\pi r^2 \implies \boxed{h = \sqrt{\pi} r.}$$

Y con esto, damas y caballeros, hemos construido la longitud que buscábamos, y crear un cuadrado con este segmento como lado no será sino la guinda sobre un pastel que las matemáticas nunca pudieron probar.



Referencias

¿Quién dijo que la cuadratura del círculo era imposible? (Mar. de 2015). https://www.gaussianos.com/quien-dijo-que-la-cuadratura-del-circulo-era-imposible/. (Accedido el 12 de junio de 2025).

Bombal Gordón, Fernando (2012). «La cuadratura del círculo: Historia de una obsesión.» En: *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* 105.2, págs. 241-258.